

Problem Set 24: 图的连通性

提交截止时间：5 月 27 日 10:00

Problem 1

定义图 G 的围长指 G 中最短回路的长度；若 G 没有回路，则定义 G 的围长为无穷大.

试证明：围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个.

如无特意说明，以后各题只考虑有限个顶点的图.

Problem 2

证明：简单图 G 是二部图当且仅当 G 不包含奇圈（即长度为奇数的初级回路）.

Problem 3

证明： $\kappa(G) = 1$ 的 r -正则图 G ，若 $r > 1$ ，总满足 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$.

Problem 4

若无向图 G 中恰有两个奇数度的顶点，则此二顶点间必存在通路.

Problem 5

给定一个顶点个数有限的简单图 G ，假定我们只通过如下方式逐步删除 G 中的顶点：每一步仅删除度小于 2 的顶点.

试证明： G 中的所有顶点均被删除当且仅当 G 中没有回路.

Problem 6

证明：设 $G = \langle V, E \rangle$ 为非平凡连通图，且 $|V| = |E| + 1$ ，则 G 中至少有一个度为 1 的顶点.

Problem 7

假设 P 是连通图 G 中的一条最长的初级通路 (路径), 且 P 不是回路. 试证明: P 的端点不是图 G 的割点.

Problem 8

证明: 设 G 为简单图, k 是一个自然数, 若 $\delta(G) \geq \frac{|G|+k-2}{2}$, 则 G 是 k -连通的.

Problem 9

设 n 阶图 G 的边数为 m , 试证明: 若 $m > C_{n-1}^2$ (即组合数 $\binom{n-1}{2}$), 则 G 必为连通图.